**Лекция 1. Постановка задачи. Интегральное уравнение.**

**Семинарское занятие № 1**

Рассмотрим процессы, описываемые линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями

 (1.1)

с краевыми условиями

 (1.2)

при наличии фазовых ограничений

 (1.3)

интегральных ограничений

 (1.4)

 (1.5)

а также ограничений на значения управления

 (1.6)

Здесь  матрицы порядков  соответственно, с кусочно-непрерывными элементами,  заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество,  – заданная матрица порядка  с кусочно-непрерывными элементами, известная вектор-функция порядка  с кусочно-непрерывными элементами,   заданные непрерывные вектор-функции   заданные кусочно-непрерывные вектор-функции порядков  соответственно, – известные постоянные, фиксированные моменты времени, заданное выпуклое замкнутое множество из   заданная кусочно-непрерывная функция.

Ставятся следующие задачи:

**Задача 1.** *Найти программное и позиционное управления из , которые переводят траекторию системы (1.1), исходящей из точки , в заданное состояние  (т.е. для частного случая, когда множества , , ,  и отсутствуют интегральные ограничения (1.4)–(1.5)).*

**Задача 2.** *Найти программное и позиционное управления из множества  которые переводят траекторию системы (1.1), исходящей из точки , в заданное состояние  (т.е. для частного случая, когда множества ,  и отсутствуют интегральные ограничения (1.4)–(1.5)). Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия.*

**Задача 3.** *Найти программное и позиционное управления из множества   которые переводят траекторию системы (1.1), исходящей из точки  в момент времени , в точку  где фиксированные точки  (т.е. для частного случая, когда множество  и отсутствуют интегральные ограничения (1.4)–(1.5)). Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия.*

**Задача 4.** *Найти программное и позиционное управления из множества  которые переводят траекторию системы (1.1), исходящей из точки  в момент времени , в точку , , при этом решение системы (1.1), функция   находится на множестве , определяемом включением (1.3), (т.е. для частного случая, когда отсутствуют интегральные ограничения (1.4)–(1.5)). Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия.*

**Задача 5.** *Найти программное и позиционное управления из множества  которые переводят траекторию системы (1.1), исходящей из точки  в момент времени , в точку , при этом решение системы (1.1), функция  находится на множестве , а также выполнены интегральные ограничения (1.4), (1.5). Разработать алгоритм построения решения задачи оптимального быстродействия.*

**Определение.** *Пусть процесс, порожденный решением уравнения (1.1) при условиях (1.2)–(1.6), управляем, т.е. существует управление  такое, что   и пара  удовлетворяет интегральным ограничениям (1.4), (1.5). Тогда искомое управление  , называется программным, а искомое управление вида  где , называется позиционным (или синтезирующим) управлением.*

Проблема управляемости динамических систем тесно связана со свойствами решения интегральных уравнений. Рассмотрим интегральное уравнение следующего вида:

, (1.7)

где  – известная матрица порядка  с кусочно-непрерывными элементами по *t* при каждом фиксированном , – пустое множество, – заданный *n*-мерный вектор, –искомая функция, , оператор . Интегральное уравнение вида (1.7) может быть отнесено к типу интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Ставятся следующие задачи:

**Задача 1.** Найти необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения (1.7).

**Задача 2.** Найти общие решения интегрального уравнения (1.7).

Решения ряда краевых задач управляемости и оптимального управления классических краевых задач, задачи на собственные значения и предельные циклы могут быть сведены к решению интегральных уравнений вида (1.7).

**Существование решения.** Необходимые и достаточные условия существования решения интегрального уравнения вида (1.7) дает следующая теорема.

***Теорема 1.*** *Интегральное уравнение (1.7) при любом фиксированном  имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

* (1.8)*

*порядка  является положительно определенной, где , – некоторые числа, (\*) – знак транспонирования.*

**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть матрица , т.е. квадратичная форма . Покажем, что интегральное уравнение (1.7) имеет решение. В самом деле, поскольку матрица , то существует обратная матрица . Выберем

,

где – любой заданный вектор. Тогда



Следовательно, в случае, когда матрица , интегральное уравнение (1.7) имеет по крайней мере одно решение . Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть интегральное уравнение (1.7) имеет решение при любом фиксированном . Покажем, что матрица . Поскольку для любого вектора , квадратичная форма , то для доказательства  достаточно показать, что матрица  неособая.

Предположим противное. Пусть матрица  особая. Тогда существует вектор ,  такой, что . Определим функцию

, , .

Заметим, что

. (1.9)

Тогда функция , , . Так как интегральное уравнение (1) имеет решение для любого вектора , то, в частности, существует функция  такая, что 

. (1.10)

Как следует из соотношений (3), (4), верно равенство

.

Это противоречит тому, что . Противоречие возникло вследствие предположения о том, что матрица  особая. Следовательно, матрица . Необходимость доказана. Теорема доказана.

Таким образом, необходимым и достаточным условием существования решения интегрального уравнения (1.7) является положительная определенность матрицы .

**Общее решение.** Множество всех решений интегрального уравнения (1.7) дает следующая теорема.

***Теорема 2.*** *Пусть матрица  положительно-определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (1) имеет вид*



, , (1.11)

*где*  *– произвольная функция,*  *– любой вектор.*

**Доказательство.** Введем следующие множества

, (1.12)



, (1.13)

где множество  содержит все решения интегрального уравнения (1.7). Теорема утверждает, что функция  принадлежит множеству тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству , т.е. .

Докажем, что . Для этого достаточно показать, что: , .

Покажем, что . В самом деле, если , то, как следует из соотношения (1.18), верно равенство







.

Отсюда следует, что . Следовательно, множество .

Покажем, что . Пусть , т.е. для функции  выполнено равенство (см. (1.12))

.

Заметим, что в соотношении (1.13) функция  произвольная. В частности, можно выбрать , . Теперь функция  запишется в виде







, .

Следовательно, . Отсюда следует, что . Из включений ,  следует, что . Теорема доказана.

**Свойства решения.** Следует отметить, что:

**1.**Как следует из формулы (1.11), функция ,  может быть представлена в виде

, ,

где

, 

– частное решение интегрального уравнения (1.7),

, 

– решение однородного интегрального уравнения

.

В самом деле,

,



;

**2.**  Функции ,  ортогональны, т.е. .

В самом деле,







;

**3.**Функция ,  является решением интегрального уравнения (1.7) с минимальной нормой в . Действительно, норма . Отсюда следует, что . Если функция , , тогда , .

**4.**Множество решений интегрального уравнения (1.7) является выпуклым. Как следует из доказательства теоремы 2, множеством всех решений уравнения является . Покажем, что – выпуклое множество.

Пусть , , ,. Легко убедиться в том, что  при всех , . В самом деле,

, ,

, ,

, .

Тогда



,

где

.